

# ВЕЙВЛЕТ-АНАЛИЗ СОЛНЕЧНОЙ АКТИВНОСТИ ЗА 300 ЛЕТ

В.В.Витязев

НИАИ им. В.В. Соболева, СПбГУ, С.Петербург

## РЕЗЮМЕ

*С помощью вейвлет-преобразования произведен анализ среднегодовых чисел Вольфа. Используются данные наблюдений с 1700 по 1999 г. Вейвлеты позволяют получить картину эволюции спектра мощности (скалограммы) во времени. Основной 11-летний цикл представлен на скалограмме в виде синусоподобной детали, амплитуда и период которой меняется во времени. Наиболее резкое изменение периода происходило в 1800-1830 гг. Вейвлет-анализ различных реализаций авторегрессионной модели второго порядка чисел Вольфа, показал, что эта модель описывает солнечную активность с гораздо большим числом случайных колебаний по сравнению с тем, что содержит реальный ряд.*

## 1 ВВЕДЕНИЕ

Ряд чисел Вольфа – это знаменитый временной ряд, играющий ключевую роль в проблеме солнечно-земных связей. Его исследованию посвящено необозримое число работ. Отметим здесь лишь одно обстоятельство: ряд Вольфа был не только объектом исследований, но и служил своеобразным фундаментом для построения базовых понятий анализа временных рядов – периодограммы (Шустер, 1906) и модели авторегрессии (Юл, 1928).

Напомним, что числа Вольфа вычисляются по формуле

$$W = k(10g + f), \quad (1)$$

где  $g$  – число групп пятен, видимых на диске Солнца,  $f$  – общее число пятен, как отдельных, так и принадлежащих группам,  $k$  – коэффициент для приведения результатов наблюдений в единую систему.

С физической точки зрения числа Вольфа не являются исчерпывающей характеристикой солнечной активности. Тем не менее, только они дают нам астрономическую информацию о вариациях солнечной активности в прошлом, поскольку обработка зарисовок диска Солнца позволила составить равномерный ряд среднегодовых чисел Вольфа, начиная с 1700 г., а отдельные значения этого ряда имеются вплоть до начала 17 столетия, когда солнечные пятна были открыты Галилеем.

## 2 ВЕЙВЛЕТЫ

Обычно для построения оценок спектра мощности (периодограмм) временных рядов используют преобразования Фурье. Преобразования Фурье обладают замечательной способностью фокусировать в точку "размазанную" по времени информацию о периодичности функции при переходе из временной области в частотную. Достигается это за счет того, что ядро преобразования Фурье не локализовано во времени, но имеет предельную локализацию в частотной области. Это обстоятельство и делает преобразование Фурье прекрасным инструментом для изучения процессов, характеристики которых не меняются со временем.

В противоположность этому вейвлет-анализ основан на использовании локализованных во времени ядер преобразования, размеры которых согласованы с масштабом изучаемых компонентов ряда. Основная идея вейвлет-преобразования отвечает специфике многих временных рядов, демонстрирующих эволюцию во времени своих основных характеристик – среднего значения, дисперсии, периодов, амплитуд и фаз гармонических компонентов. Подавляющее число процессов, изучаемых в астрономии, обладают такими свойствами: блеск квазаров, солнечная активность, неравномерность вращения Земли – вот далеко не полный перечень примеров.

Наш анализ чисел Вольфа основан на использовании интегрального вейвлет-преобразования, которое для функции  $f(t) \in L^2(R)$  задается следующим образом (Гроссман и Морле, 1984; Добечи, 1992):

$$W(a, b) = \frac{1}{|a|^{1/2}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \psi^* \left( \frac{t-b}{a} \right) dt, \quad (2)$$

где  $a, b \in R, a \neq 0$ .

Входящая в выражение (2) функция  $\psi(t)$  называется *вейвлетом* (анализирующим, базисным или материнским вейвлетом). Заметим, что в формуле (2) символом  $*$  обозначена процедура комплексного сопряжения. Параметр  $a$  определяет размер вейвлета и называется *масштабом* (*scale*). Параметр  $b$  задает временную локализацию вейвлета и называется *сдвигом* (*shift*).

В нашей работе использовался вейвлет Морле

$$\psi(t) = e^{-t^2/2} e^{i2\pi t}, \quad (3)$$

т.е. плоская волна, модулированная гауссианой. Этот вейвлет дает результаты, наиболее согласованные с терминами Фурье-анализа. В частности, понятие масштаба полностью соответствует периоду гармонических компонентов.

Заметим, что зависимость вейвлета от масштаба, следующая из определения вейвлет-преобразования, в случае вейвлета Морле (3) приводит к тому, что для каждого значения сдвига  $b$  в поле зрения преобразования находится участок ряда длиной  $P\sqrt{2}$ , где  $P$  – период гармонического компонента.

Введенным выше определениям интегрального вейвлет-преобразования, нельзя воспользоваться на практике, поскольку при обработке результатов измерений основными объектами преобразования являются не функции, заданные на всей оси времени, а временные ряды, длина которых всегда конечна. По этой причине вместо теоретических понятий вводятся их практические аналоги (оценки).

Будем считать, что временной ряд задан значениями функции, следующими друг за другом с постоянным шагом  $\Delta t$ :

$$f_k = f(t_k), \quad t_k = \Delta t k, \quad k = 0, 1, \dots, N - 1. \quad (4)$$

Для оценки вейвлет-преобразования этой последовательности воспользуемся следующим выражением:

$$W_A(a, b) = \frac{1}{n(a, b)} \sum_{k=0}^{N-1} f_k \psi^* \left( \frac{t_k - b}{a} \right), \quad (5)$$

где

$$n(a, b) = \sum_{k=0}^{N-1} e^{-\frac{1}{2} \left( \frac{t_k - b}{a} \right)^2}, \quad (6)$$

Следуя *Фостеру (1996)*, будем называть оценку (5) *амплитудной вейвлет-функцией*. Эта функция вычисляется для дискретных значений аргументов  $a_i$  и  $b_j$ ,  $i = 0, \dots, N_a - 1$ ;  $j = 0, \dots, N_b - 1$  (конкретные способы дискретизации параметров  $a$  и  $b$  могут быть различными).

Используя (5), введем оценку локального спектра энергии

$$S(a_i, b_j) = |W_A(a_i, b_j)|^2. \quad (7)$$

Эту функцию обычно называют *скалограммой (scalogram)*, подчеркивая тем самым ее способность описывать распределение энергии по масштабам. Поскольку это распределение локализовано во времени с помощью параметра сдвига  $b$ , уместно называть (7) *локальной скалограммой*, однако такой термин не нашел широкого распространения.

Очевидно, что на основе скалограммы  $S(a_i, b_j)$  можно ввести также и оценку глобального спектра энергии

$$G(a_i) = \frac{1}{N^*} \sum_j S(a_i, b_j), \quad (8)$$

где  $N^*$  – число точек, по которому осуществляется осреднение. По предложению *Скаргла (1997)* функцию (8) называют *скейлограммой (scalegram)*. Скейлограмма является прямым аналогом сглаженной периодограммы в Фурье-анализе.

Бывает так, что широкие контуры линий гармонических компонентов в скалограмме мешают проследить за эволюцией их частот во времени. Чтобы отсечь влияние контуров, можно выделить те точки скалограммы, в которых она

имеет максимумы по переменным  $a$  и  $b$ :

$$S_c(a_i, b_j) = \begin{cases} S_{ij}, & \text{если } S_{i-1,j} < S_{ij} > S_{i+1,j} \\ & \text{или } S_{i,j-1} < S_{ij} > S_{i,j+1}, \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases} \quad (9)$$

В этой формуле использовано обозначение  $S_{ij} \equiv S(a_i, b_j)$ . Функцию (9) мы будем называть *скелетоном*.

В случае синусоидального сигнала точки скелетона располагаются вдоль линий, идущих параллельно оси времени. Если в данных имеются гармонические или квазигармонические компоненты, то топографическая карта скелетона будет состоять из линий, ориентированных вдоль оси  $b$ . В случае шумового компонента линии скелетона вытягиваются в перпендикулярном направлении, т. е. параллельно оси  $a$ . Если в данных присутствуют и гармонические компоненты, и шум, то карта скелетона позволяет увидеть их раздельно.

### 3 РЕЗУЛЬТАТЫ

Не претендуя на исчерпывающий анализ физики солнечной активности, используем ряд чисел Вольфа для демонстрации возможностей вейвлет-преобразования.

На рис. 1,а показаны среднегодовые значения чисел Вольфа на промежутке от 1700 до 1999 г. Изучение этого ряда во временной области показывает много характерных особенностей. Во-первых, четко видна повторяемость максимумов и минимумов с характерным периодом приблизительно 11 лет (более тонкое изучение показывает, что расстояния между максимумами не остаются постоянными, а претерпевают небольшие изменения во времени). Во-вторых, легко усматривается различие максимальных значений ряда (так, наибольшее значение приходится на 1957 г.). Все это говорит о том, что характеристики ряда меняются во времени и что Фурье-анализ не является адекватным методом для его исследования. Действительно, в периодограмме Шустера (рис. 1,б) нашего ряда, освобожденного от линейного тренда

$$tr(t) = (33.9 \pm 2.3) + (0.105 \pm 0.013)(t - 1700), \quad (10)$$

мы видим две значимые концентрации мощности, приходящиеся на частоты 0.00-0.02 и 0.08-0.10 цикла в год. В первой полосе есть пики, соответствующие периодам 204.5; 102.3 и 56.8 года. Во второй полосе имеются четыре максимума с периодами 12.04; 11.00; 10.55

и 10.03 года. В обеих полосах частот периодограмма сильно изрезана. Изрезанность периодограммы свидетельствует о значительной стохастичности, присущей процессу солнечной активности. В подобных случаях в спектральном анализе прибегают к сглаживанию периодограммы. Результаты сглаживания с помощью окна Тьюки при параметрах сглаживания  $N^* = 150$  и  $a = 0.25$  показаны штриховой линией на рис. 1,b. Мы видим, что и периодограмма Шустера, и ее сглаженная модификация говорят о том, что ряд солнечной активности состоит из трех квазипериодических компонентов с периодами приблизительно 100, 57 и 11 лет, – и это все, что Фурье-анализ может дать при исследовании этого ряда.

В противоположность этому вейвлет-анализ позволяет увидеть не только концентрации мощности на известных масштабах, но и проследить за их развитием во времени. На рис. 2,a представлена скалограмма, вычисленная с вейвлетом Морле в диапазоне масштабов от 5 до 120 лет. Здесь имеются три спектральные линии, соответствующие масштабам (периодам) 100, 54 и 11 годам, однако, в отличие от Фурье-спектра, мы видим, что и периоды, и амплитуды этих линий изменяются во времени. На рис.2,b показан только участок скалограммы в диапазоне масштабов от 5 до 15 лет. Здесь эти изменения видны особенно ясно. Характерной особенностью является резкое падение интенсивности пятнообразования с 1800 по 1830 г., сопровождающееся одновременным изменением периода. Еще более четко изменение периода во времени показано на рис. 2,c, где приводятся не контуры спектральных линий, а только линии скелетона. Мы видим, что основной, 11-летний цикл Солнца, имеющий вид извилистой линии, идущей вдоль оси времени, пересекается шумовыми полосами, вытянутыми в перпендикулярном направлении. Этот факт говорит о том, что пятнообразовательная деятельность Солнца характеризуется не только периодическим механизмом с переменными периодом и амплитудой, но и аддитивными стохастическими компонентами типа белого шума.

В заключение отметим, что представление ряда чисел Вольфа на промежутке 1700-1999 ( без линейного тренда) с помощью авторегрессионного процесса второго порядка имеет следующий вид:

$$x_k = 1.372 x_{k-1} - 0.693 x_{k-2} + 16.55 \xi_k, \quad k = 2, 3, \dots, N - 1, \quad (11)$$

где  $x_0 = x_1 = 0$ , – начальные значения;  $\xi_k, k = 0, 1, \dots, N-1$ , – выборка из случайной величины с нулевым математическим ожиданием и единичной дисперсией, распределенной по нормальному закону.

Коэффициенты формулы (11) были вычислены нами методом максимальной энтропии. Они близки к значениям, полученным другими авторами по различным реализациям (см. Тербиж, 1992). Нами был проведен вейвлет-анализ модельных рядов типа (11). Основой результат этого анализа можно сформулировать следующим образом: реальный ряд солнечной активности является более детерминированным, чем реализации его AR-модели, поскольку скалограммы последовательностей (11) не показывают четко выраженных синусоидальных деталей (подобных 11-летней линии), ориентированных вдоль оси времени. Рис.3, на котором показаны результаты вейвлет-анализа одной из реализаций процесса (11), демонстрирует этот вывод.

## 4 Литература

*Гроссман и Морле, 1984.* – Grossman A., Morlet J. Decomposition of Hardy functions into square integrable wavelets of constant shape // SIAM J. Math. P.723-736.

*Добечи, 1992.* – Daubechies I. Ten lectures on wavelets. Society for industrial and applied mathematics. Philadelphia, Pennsylvania, 1992.

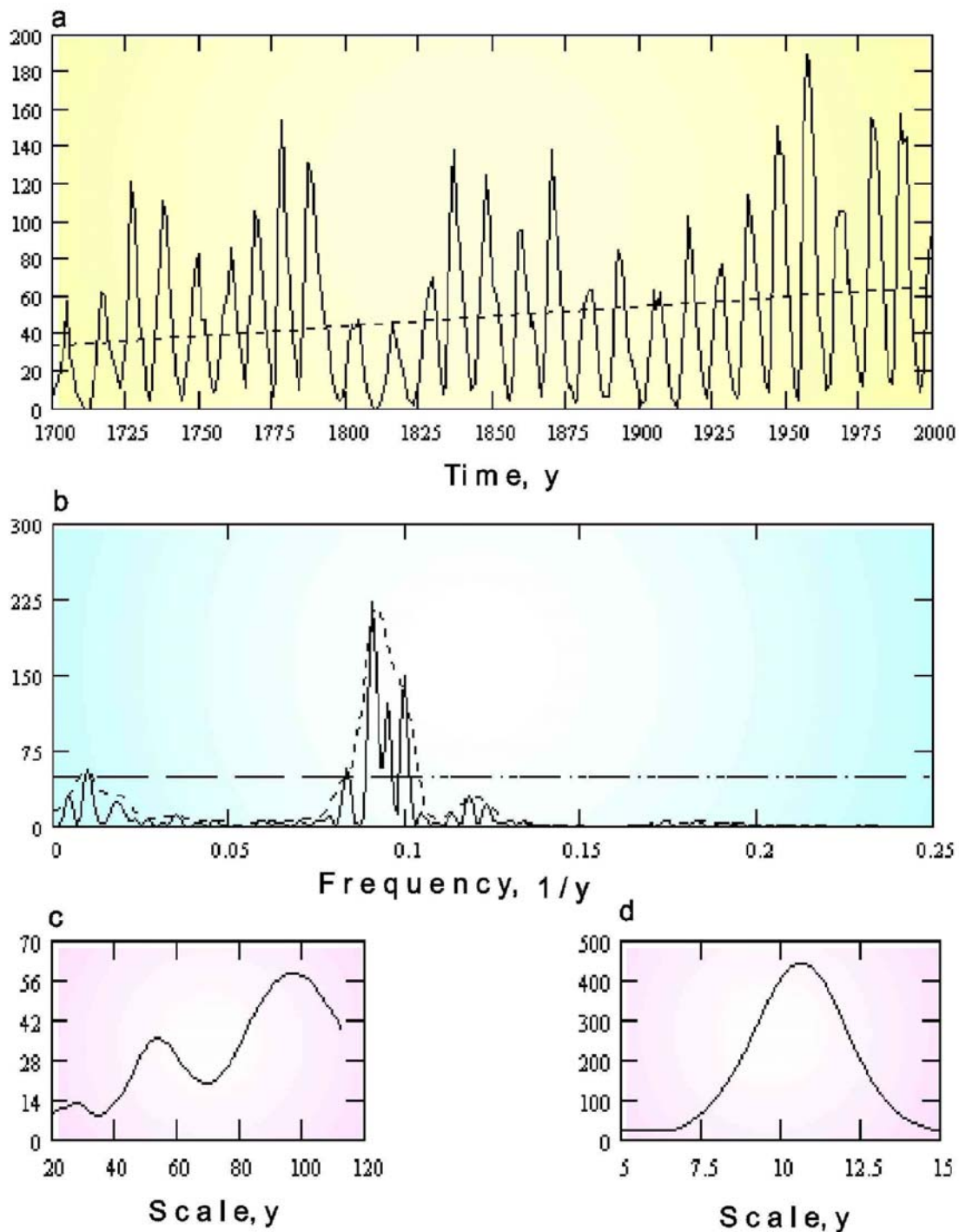
*Скаргл, 1997.* – Scargle J.D. Wavelet and Other Multi-resolution Methods for Time Series Analysis. Statistical Challenges in Modern Astronomy II /Ed. G.J.Babu and E.D.Feigelson. P. 333-347. N.Y.: Springer-Verlag.

*Тербиж В.Ю., 1992.* Анализ временных рядов в астрофизике. М.: Наука.

*Фостер, 1996.* – Foster G. Wavelets for period analysis of unevenly sampled time series // Astron. J. Vol. 112. N4. P. 1709-1729.

*Шустер, 1906.* – Schuster A. On the Periodicities of Sun Spots // Trans. R. Soc. London. Ser A. Vol. 206. P. 69-100.

*Юл, 1928.* – Yule J.U. On a Method of Investigation Periodicities in Disturbed Series with Special Reference to Wolfer's Sunspot Numbers. // Phylas. Trans. R. Soc. London. Ser. A. Vol. 226. P.267-298.



**Рис.1. Анализ чисел Вольфа:**

***a -- ряд среднегодовых чисел Вольфа 1700--1999;***

***b -- периодограмма Шустера (сплошная линия),***

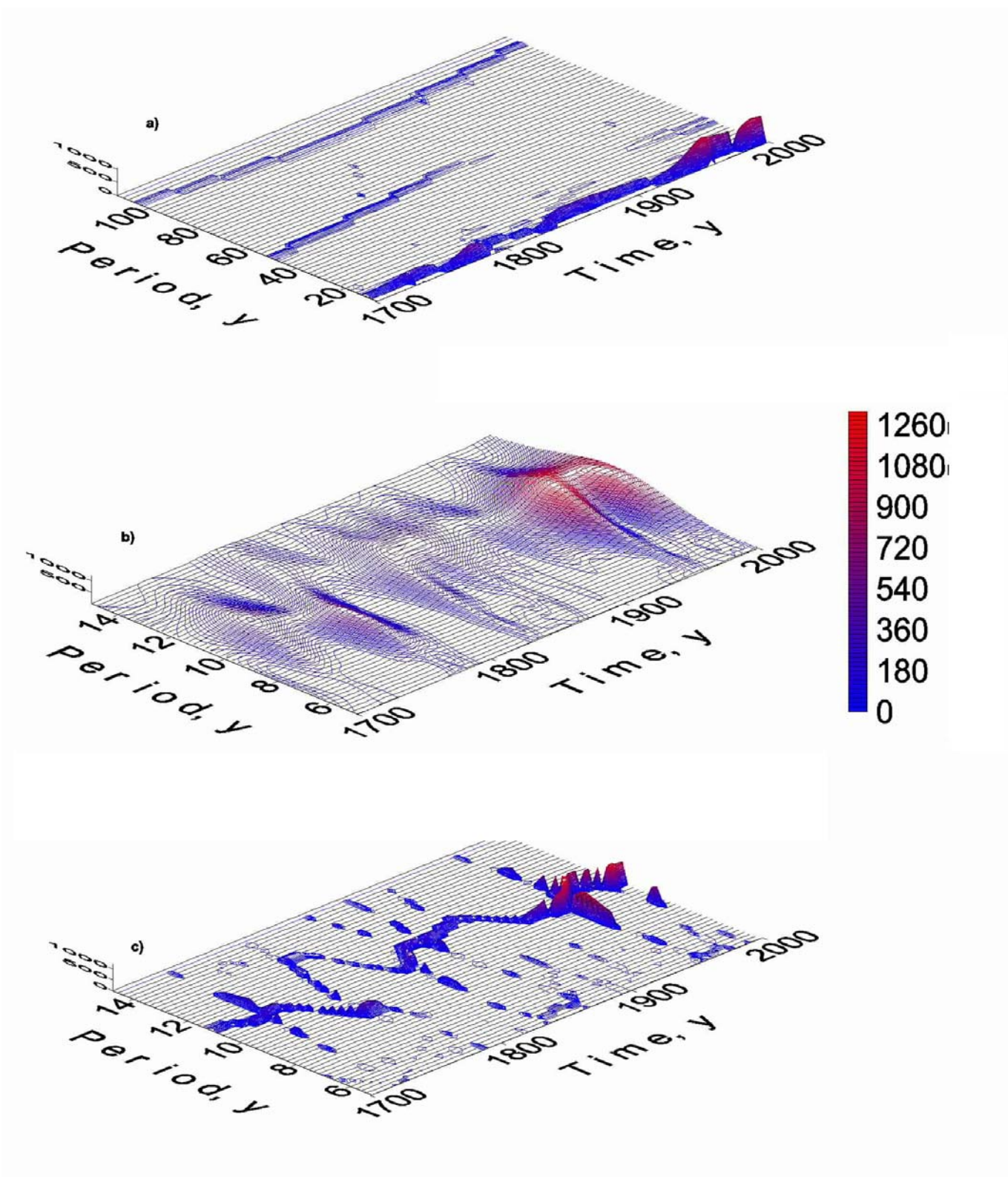
***сглаженная периодограмма (штриховая линия),***

***99-процентный порог обнаружения сигнала в шумах***

***(штрих-пунктирная линия );***

***c -- скейлограмма в диапазоне 5-120 лет;***

***d -- скейлограмма в диапазоне 5-15 лет.}***



**Рис. 2. Вейвлет-анализ ряда чисел Вольфа:**

*a -- скелетон в диапазоне периодов (масштабов) 5-120 лет;*

*b -- скалограмма в диапазоне периодов 5-15 лет;*

*c -- скелетон в диапазоне периодов 5-15 лет.}*



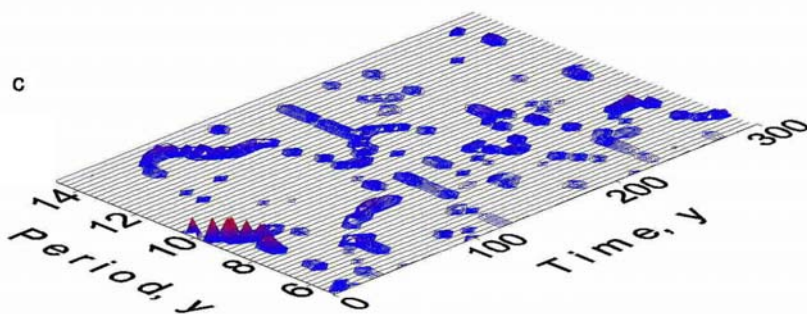
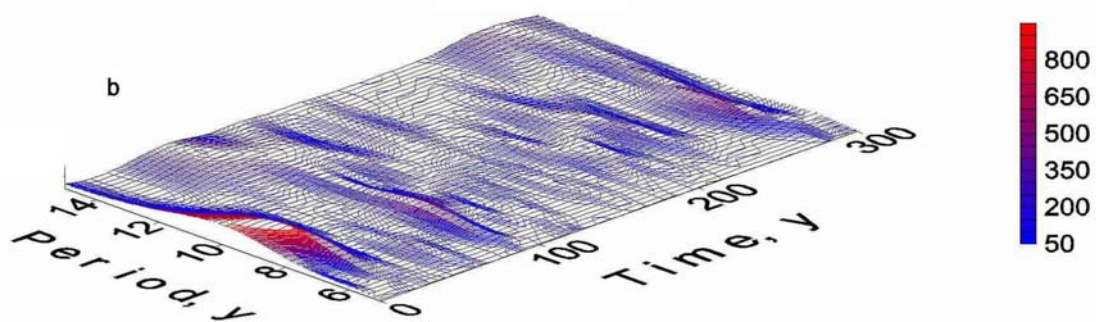
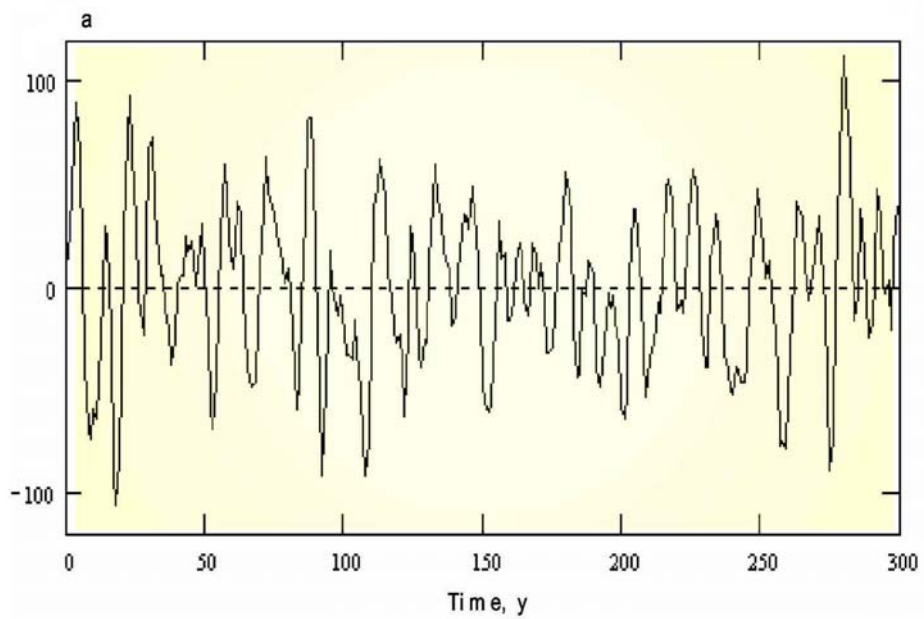


Рис. 3. Вейвлет-анализ авторегрессионного процесса второго порядка.  
*a* – исходный ряд; *b* – скалограмма в диапазоне периодов 5-15 лет;  
*c* – скелетон скалограммы в том же диапазоне периодов.